Zadania z fizyki - zestaw 1

Działania na wektorach i kinematyka punktu materialnego.

1. Na płaszczyźnie xy określone są trzy wektory:

$$\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}; \quad \vec{b}=6\vec{i}-5\vec{j}; \quad \vec{c}=2\vec{i}-4\vec{j}.$$

Obliczyć:

a) $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$;

b) $\vec{f}=\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})$.

2. Dane są dwa wektory:

$$\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}, \quad \vec{b}=-\vec{i}+\vec{k}.$$

Obliczyć:

a) długość każdego wektora,

b) iloczyn skalarny $\vec{a}\cdot\vec{b}$,

c) kąt zawarty między wektorami,

d) iloczyn wektorowy $\vec{a}\times\vec{b}$.

Odp. a) $a=5\sqrt{2}, \quad b=\sqrt{(2)};$ b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2;$ c) $\cos\alpha=0{,}2;$ d) $\vec{a}\times\vec{b}=4\vec{i}-8\vec{j}+4\vec{k}.$

3. Udowodnić podane zależności rozkładając wektory na składowe:

a) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

b) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

4. Dwie cząstki zostały wysłane z początku układu współrzędnych i po pewnym czasie ich położenia są opisane wektorami:

$$\vec{r}_1=4\vec{i}+3\vec{j}+8\vec{k} \quad \text{oraz} \quad \vec{r}_2=2\vec{i}+10\vec{j}+5\vec{k}.$$

Obliczyć:

a) długości wektorów,

b) wektor przemieszczenia cząstki drugiej względem pierwszej $\vec{r}_{12}$,

c) kąty między wszystkimi parami tych wektorów,

d) rzut wektora $\vec{r}_2$ na $\vec{r}_1$,

e) iloczyn wektorowy $\vec{r}_1\times\vec{r}_2$.

Odp. a) $r_1=|\vec{r}_1|=9.43, \quad r_2=|\vec{r}_2|=11.36;$ b) $\vec{r}_{12}=-2\vec{i}+7\vec{j}-3\vec{k};$ c) $\cos\alpha=0.755,$

$\cos\beta=-0.148, \quad \gamma=\beta-\alpha;$ d) $\vec{r}_3=\frac{\vec{r}_1}{r_1}r_2\cos\alpha;$ e) $\vec{r}_1\times\vec{r}_2=-65\vec{i}-4\vec{j}+34\vec{k}.$

5. Rybak płynie łódką w górę rzeki. Przepływając pod mostem gubi zapasowe wiosło, które wpada do wody. Po godzinie rybak spostrzega brak wiosła. Wraca z powrotem i dogania wiosło w odległości 6 km poniżej mostu. Jaka jest prędkość rzeki, jeśli rybak poruszając się zarówno w górę, jak i w dół rzeki wiosłuje jednakowo.

Odp. v = 3 km/h.

6. Łódka przepłynęła rzekę prostopadle do jej idealnie równoległych brzegów. Jednocześnie prąd rzeki zniósł łódkę o l=100 m w swoim kierunku. Szerokość rzeki wynosi s=200 m, natomiast prędkość łódki względem wody v_l=4m/s. Wyznaczyć prędkość prądu v_p rzeki oraz całkowity czas przeprawy łódki przez rzekę.

Odp. $v_p = 2$ m/s, t = 50 s.

7. Punkt materialny porusza się wzdłuż osi x zgodnie z równaniem $x = At + Bt^2$, gdzie A = 3 cm/s, B = 0,5 cm/s^2. Znaleźć średnią prędkość w ciągu pierwszych 2, 6 i 10 sekund ruchu.

Odp. Odpowiednio: 2, 0, -2 cm/s.

8. Cząstka porusza się wzdłuż osi x z prędkością $v = v_0 - a_0 t$, przy czym $v_0 = 10$ cm/s, a $a_0 = 2$ cm/s^2. Przyjmując, że x(0) = 0 znaleźć:
a) współrzędne cząstki dla t = 6, 10 i 20 sekund,
b) drogę, jaką przebyła cząstka w ciągu pierwszych 4 i 8 sekund ruchu,
c) chwile czasu, dla których współrzędna cząstki wynosi x = 10 cm.

Odp. a) 24 cm, 0 cm, -200 cm; b) 24 cm, 34 cm; c) $t_1 \approx 1{,}1$ s, $t_2 \approx 8{,}9$ s.

9. Punkt materialny porusza się w płaszczyźnie (x,y) przy czym jego ruch jest opisany równaniami:

$$x = At, \qquad y = Bt - Ct^2,$$

gdzie: A = 50 cm/s, B = 200 cm/s, C = 25 cm/s2. Znaleźć po upływie czasu t = 3 s
a) prędkość i przyspieszenie punktu;
b) kąt między wektorami prędkości $\vec{v}$ i przyspieszenia $\vec{a}$.

Odp. a) v = 0,71 m/s, a = 0,50 m/s^2; b) $\cos\alpha = -0{,}704$.

10. Balon powietrzny odrywa się od powierzchni Ziemii i unosi pionowo do góry ze stałą prędkością v_0. Wiatr nadaje mu prędkość poziomą $v_x = Ay$, gdzie A - stała, y - wysokość balonu. Znaleźć:
a) drogę przebytą przez balon w kierunku poziomym w zależności od wysokości x(y);
b) przyspieszenie balonu, jego składową styczną i normalną.

Odp. a) $x(y) = \frac{A}{2v_0} y^2$; b) $a = Av_0$, $a_s = A^2 y\left(1 + (\frac{Ay}{v_0})^2\right)^{-1/2}$, $a_n = Av_0\left(1 + (\frac{Ay}{v_0})^2\right)^{-1/2}$

11. Pułk piechoty rozciągnięty w kolumnę o długości 3 km maszeruje z prędkością 3,6 km/h. Z czoła kolumny wysłano motocyklistę na tyły. Obliczyć czas, po którym motocyklista wrócił na czoło kolumny, jeśli prędkość motocykla wynosiła 72 km/h.

Odp. t = 300 s.

12. Pocisk armatni uderzył w wał ziemny z prędkością 420 m/s i wbił się na głębokość 30 cm. Obliczyć opóźnienie, jakiego doznał pocisk oraz czas trwania jego ruchu, zakładając, że jest to ruch jednostajnie opóźniony.

Odp. a = -147000 m/s^2, t = 0.0014 s.

13. Znaleźć prędkość pociągu w chwili, gdy zaczął on hamować (ruch jednostajnie opóźniony), jeżeli droga hamowania wyniosła s=200 m, a zawieszony w wagonie ciężarek podczas hamowania odchylił się od pionu o kąt $\alpha = 5^\circ$.

Odp. v = 20 m/s.

14. Obliczyć dopuszczalną prędkość samochodu na zakręcie o promieniu krzywizny R = 200 m.

Przyspieszenie dośrodkowe nie powinno przekroczyć wartości 2 m/s^2.

Odp. v = 20 m/s

15. Ciało spada swobodnie na Ziemię z wysokości h. Na jakiej wysokości prędkość tego ciała będzie n razy mniejsza od jego prędkości końcowej? Obliczenia numeryczne wykonać dla h=27 m i n=3.

Odp. h_n = 24 m.

16. Dom ma być pokryty dachem. Jakie nachylenie należy mu nadać, aby krople deszczu spływały w jak najkrótszym czasie?

Odp. $\alpha = 45^\circ$

17. Ruch punktu poruszającego się na płaszczyźnie jest dany w układzie kartezjańskim równaniami:

$$x = bt^2, \qquad y = ct^2,$$

gdzie stałe b,c > 0. Znaleźć parametryczne równanie ruchu w układzie biegunowym, tor ruchu punktu oraz prędkość i przyspieszenie w obu układach odniesienia.

Odp. W układzie kartezjańskim tor ruchu: $y = \frac{c}{b}x, \quad x \geq 0,$ prędkość: $v = 2t\sqrt{b^2 + c^2},$

przyspieszenie: $a = 2\sqrt{b^2 + c^2}.$ W układzie biegunowym: $r = t^2\sqrt{b^2 + c^2}, \quad tg\,\varphi = \frac{c}{b}, \quad v_r = v,$

$v_\varphi = 0, \quad a_r = a, \quad a_\varphi = 0.$

18. Znaleźć prędkość i przyspieszenie w ruchu opisanym równaniami:

$$x = A\cos(Bt^2), \qquad y = A\sin(Bt^2),$$

gdzie A i B są stałymi. Znaleźć równanie toru. Jaki to jest ruch?

Odp. $v = 2ABt, \quad a = 2AB\sqrt{1 + 4B^2t^4}, \quad x^2 + y^2 = A^2.$

19. Przy powierzchni Ziemi rzucono poziomo ciało z prędkością v_0. Znaleźć przyspieszenie styczne i normalne po czasie t.

Odp. $a_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}, \quad a_s = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$

20.Ciało wyrzucono z prędkością początkową v_0 pod kątem α do poziomu. Zaniedbując opór powietrza znaleźć:
a) czas lotu ciała,
b) maksymalną wysokość h, jaką osiągnie ciało podczas ruchu oraz zasięg l,
c) równanie toru ciała y(x), gdzie y - wysokość, x - odległość ciała od miejsca wyrzucenia.

Odp. a) $t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g},$ b) $h = y_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}, \quad l = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g},$ c) $y = x\,tg\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$

21.Działo i cel znajdują się na jednym poziomie w odległości 5,1 km od siebie. Po jakim czasie pocisk wylatujący z prędkością 240 m/s osiągnie cel. Opór powietrza pomijamy.

Odp. Zadanie ma dwa rozwiązania - w zależności od kąta wystrzału 25 s lub 42 s.

22. Obliczyć prędkość liniową i przyspieszenie dośrodkowe punktu powierzchni kuli ziemskiej leżącego na szerokości geograficznej φ. Promień Ziemii oraz jej okres obrotu przyjąć jako dane.

Odp. $v=\frac{2\pi R\cos\varphi}{T}$, $a_d=\frac{4\pi^2 R\cos\varphi}{T^2}$

23. Koło o promieniu R = 2 m obraca się tak, że kąt obrotu promienia koła φ zależy od czasu t w następujący sposób:

$$\varphi(t)=A+Bt+Ct^3,$$

gdzie B=4 rad/s, C=3 rad/s3. Wyznaczyć po czasie t =2 s od momentu rozpoczęcia ruchu dla punktów położonych w odległości 3R/4 od osi obrotu:
a) prędkość kątową,
b) prędkość liniową,
c) przyspieszenie styczne, normalne i całkowite.

Odp. a) $\omega=B+3\mathrm{Ct}^{2,}$ b) $v=\frac{3}{4}R\left(B+3\mathrm{Ct}^2\right)$, c) $a_s=\frac{9}{2}RCt$, $a_n=\frac{3}{4}R\left(B+3\mathrm{Ct}^2\right)^{2,}$
$a=\frac{3}{4}R\sqrt{(6\mathrm{Ct})^2+\left(B+3\mathrm{Ct}^2\right)^4}$.

24. Koło zamachowe wykonujące n_0 = 240 obrotów/min. zatrzymuje się w czasie t = 0,5 min. Przyjmując, że ruch jest jednostajnie zmienny obliczyć ile obrotów wykonało koło do chwili zatrzymania się.

Odp. N = 60 obrotów.