Zestaw XV Funkcje dwóch i trzech zmiennych

1. Wyznacz i narysuj dziedziny naturalne podanych funkcji:
   a. $f(x,y)=\sqrt{y+2x-x^2}+\arcsin\frac{y}{3}$
   b. $f(x,y)=\arccos\frac{x}{x+y}$
   c. $f(x,y)=\frac{\sqrt{x-y}}{\ln(1-x^2-y^2)}$
   d. $f(x,y)=-\sqrt{2-x^2-2y^2}$
   e. $f(x,y)=\frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$
   f. $f(x,y)=\arcsin(x^2+y^2)$
   g. $f(x,y)=\sqrt{x\sin y}$
   h. $f(x,y)=\arcsin\sqrt{y-\sqrt{x}}$
2. Oblicz, jeżeli istnieją, podane granice funkcji:
   a. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\, w(0,0)$
   b. $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}\, w(0,0)$
   c. $f(x,y)=\frac{x}{x+y}\, w(0,0)$
   d. $f(x,y)=\frac{(xy)^2}{x^2+y^2}\, w(0,0)$
   e. $f(x,y)=\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\, w(0,0)$
   f. $f(x,y)=\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\, w(0,0)$
   g. $f(x,y)=\frac{\sin x^2 y}{x^2}\, w(0,3)$
   h. $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}\, w(0,0)$
   i. $f(x,y)=\frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, w(0,0)$
3. Oblicz pochodne cząstkowe I rzędu funkcji:
   a. $f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{z}{x}$
   b. $f(x,y)=\sqrt[x]{e^y}$
   c. $f(x,y)=e^{x^2\sin y}$
   d. $f(x,y)=\arccos\frac{y}{x}$
   e. $f(x,y,z)=x^y-z^x$
4. Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe II rzędu podanych funkcji i sprawdź, czy pochodne cząstkowe mieszane są równe:
   a. $f(x,y)=xy+\frac{x^2}{y^3}$
   b. $f(x,y)=arctg\, xy$
   c. $f(x,y,z)=e^{3x+4y}\cos 5z$
5. Sprawdź, że funkcja $z(x,y)=x\ln\frac{y}{x}$ spełnia równanie $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.
6. Oblicz wskazane pochodne cząstkowe podanych funkcji:
   a. $\frac{\partial^5 f}{\partial x\,\partial y^4}, f(x,y)=xe^{-y}$
   b. $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2\,\partial x\,\partial y^2}, f(x,y,z)=\ln(x^2+2y-z)$
7. Napisz równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:
   a. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}, (x_0,y_0,z_0)=(\sqrt{2},-\sqrt{3},2)$
   b. $z=y\ln(2+x^2y-y^2), (x_0,y_0,z_0)=(2,1,z_0)$
8. Wykorzystując różniczkę funkcji oblicz przybliżone wartości podanych wyrażeń:
   a. $\frac{arc\,tg\,0{,}9}{\sqrt{4{,}02}}$
   b. $\frac{0{,}98^{1{,}01}}{1{,}01^{2{,}01}}$
9. Wyznacz pochodne cząstkowe I rzędu względem x i y podanych funkcji złożonych:
   a. $f(u,v)=u^v, u=\ln(x-y), v=e^{\frac{x}{y}}$
   b. $f(u,v)=e^{uv}, u=\ln\sqrt{x^2-y^2}, v=arc\,tg\,\frac{x}{y}$

10. Sprawdź, czy funkcja $f(x,y)=2\cos^2(y-\frac{x}{2})$ spełnia równanie: $2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$.

11. Zbadaj, czy podane funkcje mają ekstrema lokalne:
    a. $f(x,y)=2-\sqrt{3x^2+4y^2}$ b. $f(x,y)=x^8-y^4$

12. Znajdź ekstrema lokalne funkcji:
    a. $f(x,y)=(2x+y^2)e^x$ c. $f(x,y)=(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2$
    b. $f(x,y)=(x-y+1)^2+(2x+y-4)^2$ d. $f(x,y)=x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}, x>-1, y>-1$

13. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji na podanym zbiorze:
    $f(x,y)=x^2-2y^2, x^2+y^2\leqslant 36$.

14. Napisz równania stycznych do krzywych określonych równaniami we wskazanych punktach tych krzywych:
    a. $x^3+y^3-2xy=0, (x_0, y_0)=(1,1)$
    b. $x e^y+y e^x=e^{xy}, (x+0, y_0)=(1,0)$

15. Oblicz pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych $y=y(x)$ określonych równaniami:
    a. $y-arctg\, y-x^3=0$ b. $x e^y+y e^x-2=0, x_0=0$

16. Stosując metodę najmniejszych kwadratów znajdź nieznane parametry funkcji, która najlepiej aproksymuje podane wyniki pomiarów:
    $f(x)=ax+b, (0,1), (1,2), (2,3), (3,5)$.