Zadania z matematyki - elementy geometrii analitycznej

Zadanie 1 Na płaszczyźnie xy określone są trzy wektory $\vec{a} = [3, 2]$, $\vec{b} = [6, -5]$, $\vec{c} = [2, -4]$. Obliczyć:
a) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;
b) $\vec{f} = \vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$.

Zadanie 2 Dane są dwa wektory $\vec{a} = [3, 4, 5]$, $\vec{b} = [-1, 0, 1]$. Obliczyć:
a) długość każdego wektora;
b) iloczyn skalarny $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
c) kąt zawarty między wektorami;
d) iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$.

Zadanie 3 Dane są dwa wektory $\vec{r}_1 = [4, 3, 8]$ i $\vec{r}_2 = [2, 10, 5]$. Obliczyć:
a) długości wektorów;
b) wektor $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$;
c) kąty między wszystkimi parami tych wektorów;
d) rzut wektora $\vec{r}_2$ na $\vec{r}_1$;
e) iloczyn wektorowy $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$.

Zadanie 4 Udowodnić podane zależności rozkładające wektory na składowe:
a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$;
b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Zadanie 5 Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są prostopadłe oraz $|\vec{a}| = 2$ i $|\vec{b}| = 3$. Obliczyć długość wektora $\vec{a} - \vec{b}$.

Zadanie 6 Dany jest wektor $\vec{a} = [1, 2]$. Znaleźć współrzędne wektora $\vec{b}$ prostopadłego do wektora $\vec{a}$, jeżeli $|\vec{b}| = 3\sqrt{5}$.

Zadanie 7 Dane są wektory $\vec{w} = [3, 7]$, $\vec{u} = [2, 3]$ i $\vec{v} = [-1, 1]$. Wyznaczyć liczby a i b tak, by wektor $\vec{w} + a\vec{u} + b\vec{v}$ był wektorem zerowym.

Zadanie 8 Obliczyć długość wektora $2\vec{AC} - 3\vec{BC}$, jeżeli $A = (2, 1)$, $B = (0, 2)$ i $C = (-1, 4)$.

Zadanie 9 Dane są punkty $A = (1, 2)$ i $B = (2, 4)$. Znaleźć punkt C spełniający warunek $|\vec{AC}| = 2|\vec{AB}|$.

Zadanie 10 Dane są punkty $A = (1, 1)$, $B = (3, 3)$, $C = (5, 1)$. Obliczyć współrzędne wektorów $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$, ich długości i kąty między nimi.

Zadanie 11 Znaleźć współrzędne wektora $\vec{x}$ równoległego do wektora $\vec{u} = [2, 3]$, jeżeli iloczyn skalarny wektorów $\vec{x}$ i $\vec{v} = [-1, 1]$ jest równy 5.

Zadanie 12 Obliczyć $|\vec{a} - \vec{b}|$, jeżeli $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$, $|\vec{a}| = 3$ i $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$.

Zadanie 13 Wektor o początku $A = (-4, 2, 3)$ ma długość 14 i kosinusy kierunkowe $\frac{2}{7}$, $-\frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$. Obliczyć współrzędne końca wektora B.

Zadanie 14 Obliczyć współrzędne punktu M wiedząc, że jego promień wodzący ma długość 8 i tworzy z osią Ox kąt $\frac{\pi}{4}$, a z osią Oy kąt $\frac{\pi}{3}$.

Zadanie 15 Znaleźć kąty wewnętrzne trójkąta o wierzchołkach $A = (2, -1, 3)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (0, 0, 5)$.

Zadanie 16 Znaleźć wektor jednostkowy prostopadły do wektorów $\vec{a} = [2, 3, -1]$, $\vec{b} = [1, 2, -3]$.

Zadanie 17 Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, -2, 8)$, $B = (0, 0, 4)$, $C = (6, 2, 0)$. Następnie wyznaczyć długość wysokości h_B z wierzchołka B.

Zadanie 18 Obliczyć objętość i pole powierzchni całkowitej równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a} = [1, 0, 0]$, $\vec{b} = [1, 1, 2]$, $\vec{c} = [2, 1, 0]$.

Zadanie 19 Dane są trzy wierzchołki czworościanu $A = (4, 0, -2)$, $B = (6, -2, 2)$, $C = (4, -4, 6)$. Wyznaczyć czwarty wierzchołek D wiedząc, że D leży na osi Oy a objętość czworościanu jest równa 40.

Zadanie 20 Szklanka w kształcie walca o wewnętrznej średnicy d = 10 cm i głębokości h = 12 cm jest napełniona do połowy wodą. Jeśli szklankę przechylamy tak, by woda osięgnęła krawędź, to powierzchnia wody będzie ograniczona elipsą. Znaleźć półosie tej elipsy.

Zadanie 21 Wykazać, że promienie wodzące punktu $P = (x, y)$ na elipsie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ wyrażają się wzorami $r_1 = a + ex$, $r_2 = a - ex$, gdzie e – mimośród.

Zadanie 22 Dana jest hiperbola $x^2 - y^2 = 8$. Napisać równanie hiperboli współogniskowej przechodzącej przez punkt $A = (-5, 3)$.

Zadanie 23 Napisać równania stycznych do hiperboli $4x^2 - y^2 = 4$ poprowadzonych z punktu $A = (1, 4)$.

Zadanie 24 Czy dla hiperboli prawdziwe jest zdanie: hiperbola składa się z

punktów, dla których iloczyn odległości od asymptot jest stały?

Zadanie 25 Napisać równanie paraboli, mając dane ognisko $F = (2, -1)$ i równanie kierownicy $x - y - 1 = 0$.

Zadanie 26 Ustalić warunek, przy którym prosta $y = mx + b$ jest styczna do paraboli $y^2 = 2px$.

Zadanie 27 Udowodnić, że styczne do paraboli $y^2 = 2px$ poprowadzone z dowolnego punktu kierownicy są wzajemnie prostopadłe.