Zadania z matematyki - zestaw 5

1. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+4}{x+2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{27-x^3}{x-3}$.

e) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$.

f) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{x^5+32}$.

g) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$.

h) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$.

Wskazówka: Podstawić $1+mx=t^3$.

j) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$, n – liczba naturalna.

k) $\lim\limits_{x\to 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$.

l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$.

m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x}{3\sin 2x}$.

n) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x}{x}$.

o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{4x}$.

p) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, 2x}{\mathrm{tg}\, x}$.

r) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$.

s) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Zbadać ciągłość funkcji:

a) $f(x)=\frac{x^2-25}{x+5}$ dla $x\neq -5$ i $f(-5)=-10$.

b) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ dla $x\neq 0$ i $f(0)=1$.

c) $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$ dla $x\neq 0$ i $f(0)=1$.

d) $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

3. Określić funkcję $f(x)$ w punkcie $x = 0$ tak, aby była ona ciągła:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

b) $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$.

c) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

4. Dla jakiej wartości parametru m dana funkcja jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych?

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{dla} \quad x \neq 1 \\ m - 5 & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla} \quad x \geq 3 \\ x + 2m & \text{dla} \quad x < 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2x^3 & \text{dla} \quad x < 0 \\ m + 2 & \text{dla} \quad x = 0 \\ x^3 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$

5. Znaleźć granicę lewostronną i granicę prawostronną następujących funkcji:

a) $\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ dla $x = 0$.

b) $e^{\frac{1}{1-x^3}}$ dla $x = 1$.

c) $\frac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}}$ dla $x = 1$.