

Zestaw XVIII Całka potrójna

1. Oblicz podane całki potrójne po wskazanych obszarach:

a. $\iiint_P x z \sin xy \, dx \, dy \, dz, P = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right] \times [0, \pi] \times [0, 1]$

b. $\iiint_P \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{x+y+z+1}}, P = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$

2. Podane całki potrójne zamień na iloczynyny całek:

a. $\iiint_P z 2^{x-y} \, dx \, dy \, dz, P = [0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1]$

b. $\iiint_P \frac{\ln^2 \sqrt{x} x \, dx \, dy \, dz}{\cos z}, P = [1, e] \times [1, 2] \times \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]$

3. Całkę potrójną $\iiint_U f(x, y, z)$ zamień na całki iterowane, jeżeli obszar U jest ograniczony

powierzchniami o podanych równaniach:

a. $x=0, y=0, z=0, x+y+z=3$

b. $x^2+y^2=3, z=-1, z=2$

4. W podanych całkach iterowanych zamień kolejność całkowania:

a. $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^R f(x, y, z) \, dz$ b. $\int_{-2}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^4 f(x, y, z) \, dz$

5. Oblicz całki potrójne z danej funkcji po wskazanych obszarach:

a. $f(x, y, z) = xyz, U: y \geq x^2, x \geq y^2, 0 \leq z \leq xy$

b. $f(x, y, z) = \sqrt{x}, U: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq z \leq \sin y$

c. $f(x, y, z) = \frac{1}{(x+y+z)^3}, U: x+y=3, y=2, x=0, y=0, z=0$

d. $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2, U: 3(x^2+y^2)+z^2=3a^2$

6. Wprowadzając współrzędne walcowe oblicz całkę po wskazanym obszarze:

a. $\iiint_U (x^2+y^2) \, dx \, dy \, dz, U: \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$

b. $\iiint_U x^2 \, dx \, dy \, dz, U: 0 \leq z \leq 9-x^2-y^2$

7. Wprowadzając współrzędne sferyczne oblicz całkę po wskazanym obszarze:

a. $\iiint_U (x^2+y^2+z^2) \, dx \, dy \, dz, U: -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0$

b. $\iiint_U z^2 \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dx \, dy \, dz, U: 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq x$

8. Oblicz objętości obszarów ograniczonych powierzchniami:

a. $z=2-x^2-y^2, z=0$

c. $x+y+z=4, x=3, y=2, x=0, y=0, z=0$

b. $z=\sqrt[4]{x^2+y^2}, z=1, z=\sqrt{2}$

d. $x^2+y^2+z^2=2z, x^2+y^2=z^2$

9. Oblicz:

a. masę obszaru $U: x^2+y^2 \leq 16, 0 \leq z \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$, o gęstości objętościowej

$\gamma(x, y, z) = x^2+y^2$ oraz obszaru $U: x^2+y^2+z^2 \leq z, \gamma = \frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}$

b. położenie środka masy półkuli o promieniu R

c. moment bezwładności kuli U o promieniu R , masie M względem jej średnicy